Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti.

(*Di* Felice Klein [*a Göttingen*]). (*)

Programma pubblicato in occasione dell' accoglimento nella Facoltà filosofica e nel Senato dell' Università di Erlangen, 1872,

tradotto da GINO FANO.

Fra i risultati ottenuti negli ultimi cinquant'anni nel campo della Geometria occupa il primo posto lo sviluppo della *Geometria Proiettiva* (v. nota I). Benchè da principio le così dette relazioni metriche, non conservandosi invariate nelle proiezioni, sembrassero inaccessibili a questa disciplina, tuttavia recentemente si è riusciti ad abbracciarle anch'esse sotto il punto di vista proiettivo, di modo che ora i metodi proiettivi comprendono tutta quanta la geometria. Solo che le proprietà metriche vi compaiono, non più come proprietà degli oggetti in sè, ma come relazioni fra essi ed una forma fondamentale, il cerchio immaginario all'infinito (delle sfere).

(*) [Alla proposta del sig. Segre †) di pubblicare negli Annali una traduzione del mio Programma del 1872 ho accondisceso tanto più volentieri, in quanto che il primo volume testè comparso della « *Theorie der Transformationsgruppen* » di Lie (Leipzig 1888) potrebbe far sì che l'interesse dei geometri si rivolgesse maggiormente a siffatte discussioni. — La traduzione è assolutamente letterale; nei due o tre passi in cui si sono mutate alcune parole si son racchiuse fra parentesi quadre [—] le nuove espressioni. Nello stesso modo si sono contrassegnate una serie di aggiunte sotto il testo, che solo ora vi furono introdotte.

F. Klein.]

†) Le ragioni di questa proposta (messa poi ad esecuzione grazie al sig. Fano, studente nell'Università di Torino) non consistevano per me soltanto nell'interesse *storico* che a quest'opuscolo proviene dalla moltitudine di ricerche, specialmente del sig. Klein e della sua scuola, che più o meno direttamente s'ispirarono da quasi un ventennio alle vaste vedute ed ai profondi concetti in esso contenuti. Questo lavoro non è, a mio avviso, abbastanza noto ai *giovani geometri italiani;* ed è specialmente per essi che ho desiderato si

Confrontando le nozioni della geometria ordinaria (elementare) con questo metodo, introdottosi gradatamente, di considerare le forme dello spazio, sorge la questione, se esista un principio generale, secondo cui ambo i metodi potrebbero organizzarsi. Tale questione appare tanto più importante, in quanto che accanto alla geometria elementare ed alla proiettiva si presenta una serie di altri metodi ai quali, con tutto che meno sviluppati, convien concedere pari diritto di esistenza autonoma. Tali sarebbero la geometria dei raggi reciproci, quella delle trasformazioni razionali, ecc. le quali saranno in seguito menzionate ancora ed esposte.

Coll'assumerci di stabilire in seguito un sì fatto principio noi non veniamo certo a sviluppare alcuna idea essenzialmente nuova, ma solo delineiamo con chiarezza e precisione ciò che fu già pensato da taluno con più o meno esattezza. Ma il pubblicare siffatte considerazioni comprensive appariva tanto più giustificato, in quanto che la geometria, che pur è unica nella sua sostanza, nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline quasi separate (v. nota II), che vanno progredendo alquanto indipendentemente le une dalle altre. Aggiungasi a ciò l'intenzione particolare di esporre metodi e punti di vista che vennero svolti in lavori recenti di Lie e miei. I nostri lavori, per quanto fosser diversi gli oggetti a cui si riferivano, pure d'accordo sono entrati in questo modo generale di considerazione, sicchè era una specie di necessità di discutere finalmente anche questo, caratterizzando dal suo punto di vista contenuto e tendenza di quei lavori.

Benchè finora siasi parlato di sole ricerche geometriche, pure vi si devono intender comprese quelle relative a varietà comunque estese, le quali si sono svolte dalla geometria coll'astrarre dalla rappresentazione nello spazio, rappresentazione non essenziale per le considerazioni puramente matematiche (v. note III e IV). Nello studio delle varietà vi sono appunto dei tipi differenti

---

facesse questa ristampa. Tante idee generali ed ingegnose che si trovano in queste pagine, come l'*identità* sostanziale fra varie discipline matematiche (ed in particolare fra discipline analitiche e geometriche!) che si rappresentano l'una sull'altra quando si tenga conto dei *gruppi di trasformazioni* che in esse si pongono a base; le varie considerazioni su questi gruppi; tante giuste osservazioni che mettono sotto la luce più vera e precisano nel miglior modo il carattere di vari argomenti e varie dottrine, e specialmente di alcune più discusse, come quella delle varietà più volte estese, e la geometria non euclidea: tutte queste son cose o non sufficientemente conosciute e studiate dai giovani, o note solo per via indiretta. Su esse mi sia permesso richiamare tutta la loro attenzione.

Al prof. Klein pel consenso dato a questa traduzione, non che per la revisione e per le aggiunte fattevi; e così pure al sig. Direttore degli Annali per l'ospitalità gentilmente accordatale, i più vivi ringraziamenti del Traduttore e miei.

C. Segre.

come in geometria, e si tratta, come in geometria, di mettere in rilievo ciò che v' ha di comune e di diverso in ricerche intraprese indipendentemente le une dalle altre. In via astratta, basterebbe in seguito parlare semplicemente di varietà più volte estese; ma, collegandola alle rappresentazioni geometriche più famigliari, l'esplicazione si fa più semplice e più facilmente intelligibile. Partendo dalla considerazione dei corpi geometrici, e sviluppando sopra di essi, come esempio, le idee generali, battiamo la stessa via che ha percorsa la scienza nel suo sviluppo, e che di solito nell'esposizione torna maggior conto di mettere a base.

Non è possibile far qui un'esposizione preliminare della materia di cui ci occuperemo in seguito, poichè essa mal si adatta ad una forma più ristretta (1); i titoli dei paragrafi mostreranno il progresso generale del pensiero. Ho aggiunto alla fine una serie di note, nelle quali ho maggiormente sviluppati alcuni punti particolari, quando ciò mi sembrava utile all'esplicazione generale del testo, ovvero sono stato costretto a separare da quelli affini il principio astrattamente matematico conforme alle considerazioni del testo medesimo.

§ 1.

Gruppo di trasformazioni dello spazio. Gruppo principale. Si pone un problema generale.

Il concetto più essenziale fra quelli necessari per quanto esporremo in seguito è quello di *gruppo* di trasformazioni dello spazio.

Componendo assieme quante si vogliano trasformazioni dello spazio (2), si ha sempre di nuovo una trasformazione. Ora, se una data serie di trasformazioni gode della proprietà che ogni trasformazione risultante da composi-

(1) Questa concisione di forma è un difetto dell'esposizione che faremo in seguito; difetto che, temo, renderà più difficile l'intelligenza. Ma a ciò si sarebbe potuto ovviare solo con una trattazione molto più estesa, nella quale le singole teorie, qui appena accennate, fossero ampiamente svolte.

(2) Noi supponiamo sempre soggetto simultaneamente alle trasformazioni tutto il complesso delle figure dello spazio, e parliamo perciò semplicemente di trasformazioni dello spazio. Le trasformazioni possono introdurre in luogo dei punti altri elementi, come fanno per es. quelle reciproche; ma su ciò nel testo non si fa distinzione.

zioni di queste appartenga alla serie medesima, chiameremo quest'ultima un *gruppo di trasformazioni* (1) (2).

Un esempio di gruppo di trasformazioni ci è dato dal complesso dei movimenti (considerando ogni movimento come un'operazione eseguita su tutto lo spazio). Un gruppo contenuto in questo è per es. quello delle rotazioni attorno ad un punto (3). Al contrario, un gruppo che comprende quello dei movimenti è costituito dall'insieme delle collineazioni. Invece il complesso delle trasformazioni reciproche non forma alcun gruppo, — perchè due reciprocità assieme dan luogo ad una collineazione —; si ha però un gruppo considerando il complesso di tutte le trasformazioni reciproche e collineari (4).

Ora vi sono nello spazio delle trasformazioni che non alterano affatto le proprietà geometriche dei corpi. Infatti, per la natura del concetto di proprietà geometriche, queste sono indipendenti dalla posizione che la figura da studiare occupa nello spazio, dalla sua grandezza assoluta, e finalmente anche dal senso (5) in cui sono disposte le sue parti. Le proprietà di una tale figura rimangono dunque inalterate in tutti i movimenti dello spazio, nelle sue trasformazioni per similitudine, nel processo di riflessione (specchiamento), come pure in tutte le trasformazioni che risultano da composizioni di queste. Il complesso di tali trasformazioni lo chiameremo *gruppo principale* (6) di trasformazioni dello

---

(1) [Questa definizione vuole ancor essere completata. Vale a dire, nei gruppi del testo si suppone tacitamente che essi, accanto ad ogni operazione che abbiano a contenere, ne contengano altresì sempre l'inversa; ora questo, nel caso che le operazioni siano in numero infinito, non è punto una conseguenza del concetto di gruppo come tale; la nostra supposizione doveva quindi aggiungersi espressamente alla definizione di questo concetto data nel testo.]

(2) La nozione e la denominazione si sono prese dalla *teoria delle sostituzioni*, nella quale però in luogo delle trasformazioni di un campo continuo compajono gli scambi di un numero finito di grandezze discrete.

(3) Camille Jordan ha determinato in generale tutti i gruppi contenuti in quello dei movimenti: *Sur les groupes de mouvements*. Annali di Matematica, t. II.

(4) Non è punto necessario, come però si verificherà sempre per i gruppi di cui faremo menzione nel testo, che le trasformazioni di un gruppo formino una successione continua. Costituisce un gruppo per es. anche la serie finita di movimenti che possono far sovrapporre un corpo regolare a sè stesso, ovvero la serie infinita ma discreta di quelli che sovrappongono una sinussoide a sè medesima.

(5) Per «senso» intendo qui la proprietà dell'ordinamento, su cui si fonda la differenza dalla figura simmetrica (immagine riflessa). Quindi ad es. si distinguono riguardo al senso un'elica destrorsa ed una sinistrorsa.

(6) Che queste trasformazioni formino un gruppo è necessario in causa della loro stessa definizione.

spazio: *le proprietà geometriche non si alterano nelle trasformazioni del gruppo principale*. E inversamente possiamo anche dire: *le proprietà geometriche sono caratterizzate dalla loro invariabilità rispetto alle trasformazioni del gruppo principale*. Invero, se si considera per un istante lo spazio come immobile, ecc., come una varietà rigida, allora ogni figura avrà un interesse individuale; or bene, fra le proprietà ch'essa avrà come individuo, soltanto quelle propriamente geometriche si conserveranno nelle trasformazioni del gruppo principale. Questa nozione, formulata qui in modo un po' indeterminato, apparirà più chiara nel corso ulteriore delle considerazioni.

Facciamo ora astrazione dall'immagine sensibile, matematicamente non essenziale, e consideriamo lo spazio semplicemente come una varietà più volte estesa, quindi a tre dimensioni se ci atteniamo alla solita rappresentazione del punto come elemento dello spazio. Per analogia colle trasformazioni dello spazio parliamo di trasformazioni della varietà; anch'esse formano dei *gruppi*. Solo che non c'è più come nello spazio un gruppo distinto dagli altri pel suo significato; ogni gruppo è equivalente ad ogni altro. Come generalizzazione della Geometria sorge così il seguente problema comprensivo:

È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni; studiare le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato.

Secondo l'espressione moderna, la quale però non si suol riferire che ad un determinato gruppo, quello di tutte le trasformazioni lineari, possiamo anche dire così:

È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni. Si sviluppi la teoria invariantiva relativa al gruppo medesimo.

Questo è il problema generale che comprende in sè, non solo la geometria ordinaria, ma anche e in particolare i nuovi metodi geometrici che qui dobbiamo nominare, e le diverse maniere di trattazione delle varietà comunque estese. Ciò che conviene più specialmente notare si è l'arbitrarietà che sussiste in quanto alla scelta del gruppo di trasformazioni da fissare; e l'egual diritto, che ne segue e che in questo senso va inteso, di tutte le specie di considerazioni che si raccolgono sotto quel punto di vista generale.

§ 2.

I gruppi di trasformazioni di cui l'uno abbraccia l'altro vengono subordinati fra loro. Diversi tipi di ricerche geometriche e loro reciproca relazione.

Poichè le proprietà geometriche dei corpi rimangono inalterate in *tutte* le trasformazioni del gruppo principale, così, considerato da sè solo, è assurdo il ricercare quelle loro proprietà per cui ciò si verifica soltanto rispetto ad una parte delle trasformazioni stesse. Ma il porre una tale questione diventa giustificato, quantunque solo *formalmente,* se noi studiamo le forme dello spazio in relazione ad elementi immaginati fissi. Consideriamo ad es., come nella trigonometria sferica, gli enti geometrici con speciale riguardo ad un punto fisso. Allora la questione è anzitutto questa: Sviluppare le proprietà invariantive, rispetto al gruppo principale fissato, non più dei corpi a sè, ma del sistema formato da essi e dal punto dato. Ma una tale questione possiamo metterla anche sotto quest'altra forma: Si studino le forme dello spazio in sè per quanto concerne le proprietà che non si alterano in quelle trasformazioni del gruppo principale che conservano fisso il punto proposto. In altri termini: È indifferente di studiare le forme dello spazio in relazione al gruppo principale, e aggiunger loro il punto dato, ovvero, senza aggiunger loro nulla di dato, di sostituire al gruppo principale quell'altro in esso contenuto, le cui trasformazioni lasciano inalterato il punto medesimo.

È questo un principio del quale spesso si fa uso in seguito, e che perciò enunceremo qui subito in generale, per es. nel modo seguente:

Sia data una varietà e, per la sua trattazione, un gruppo di trasformazioni ad essa relativo. Si ponga il problema di studiare le forme contenute nella varietà in relazione ad una data forma. *Allora noi possiamo o aggiungere al sistema delle forme quest'ultima data, e allora si richiederanno le proprietà del sistema così esteso in relazione al gruppo proposto; — ovvero non estendere il sistema, ma limitare le trasformazioni che si mettono a base della trattazione a quelle contenute nel gruppo medesimo che lasciano inalterata la proposta forma (e che necessariamente costituiscono ancora un gruppo).*

Contrariamente alla questione sollevata al principio del paragrafo, occupiamoci adesso dell'inversa, che si può comprendere fin d'ora. Cerchiamo quali siano le proprietà dei corpi che si conservano in un gruppo di trasformazioni

comprendente quello principale come parte. Ogni proprietà che troviamo in una tale ricerca è una proprietà geometrica del corpo a sè, ma la reciproca non sussiste. In questa entra invece in vigore il principio testè riportato, nel quale ora il gruppo principale è il meno esteso. Si ha quindi:

Sostituendo al gruppo principale un altro gruppo più ampio, le proprietà geometriche si conservano solo in parte. Le rimanenti appaiono come proprietà, non più dei corpi a sè, ma del sistema che risulta aggiungendo a questi una forma speciale. Questa forma speciale (per quanto può essere determinata [1]*) è definita dal fatto che, supposta fissa, concede allo spazio, fra le trasformazioni del gruppo proposto, solo quelle del gruppo principale.*

Su questa proposizione riposa ciò che hanno di particolare i nuovi indirizzi geometrici che qui dobbiamo discutere, e il loro rapporto al metodo elementare. Il loro carattere è appunto quello di porre a base delle considerazioni, in luogo del gruppo principale, un altro gruppo più esteso di trasformazioni dello spazio. La loro reciproca relazione è determinata da una proposizione analoga, finchè i loro gruppi si comprendono l'un l'altro. Questo vale anche per i diversi metodi di trattazione di varietà più volte estese che dobbiamo considerare. Ciò verrà ora mostrato pei singoli metodi, sui quali i teoremi stabiliti in generale in questo paragrafo e nel precedente troveranno spiegazione in oggetti concreti.

§ 3.

Geometria proiettiva

Ogni trasformazione dello spazio che non appartenga precisamente al gruppo principale può servire a trasportare a figure nuove proprietà di figure note. Così noi usiamo la geometria del piano per quella di superficie rappresentabili sopra il piano; così, già assai prima che nascesse una vera e propria geometria proiettiva, si arguivano dalle proprietà di una figura data quelle di altre che se ne deducevano per proiezione. Ma la geometria proiettiva sorse solamente coll'abitudine di considerare la figura originale come essenzialmente identica a tutte quelle che ne sono deducibili proiettivamente, e di enunciare

(1) Si genera per es. una tal forma applicando le trasformazioni del gruppo principale a un elemento originale arbitrario, che non resti invariato in alcuna delle trasformazioni del gruppo proposto.

le proprietà che si trasportano per proiezione in modo da render evidente la loro indipendenza dalle modificazioni che si hanno proiettando. Con ciò si venne a porre a base della trattazione nel senso del § 1 *il gruppo di tutte le trasformazioni proiettive, creando per tal modo il contrasto fra geometria proiettiva ed elementare.*

Un processo di sviluppo simile a quello qui citato può concepirsi come possibile in ogni sorta di trasformazioni dello spazio; e noi ci ritorneremo sopra più volte ancora. Nella geometria proiettiva stessa esso si è sviluppato ancora da due lati. Una delle estensioni del concetto si effettuò col comprendere le trasformazioni *reciproche* (dualistiche) nel gruppo posto a fondamento. Sotto il punto di vista attuale due figure duali tra loro non si considerano più come diverse, ma come essenzialmente identiche. Un altro passo si fece coll'estensione del gruppo fondamentale di trasformazioni collineari e reciproche mediante la considerazione di quelle *immaginarie* corrispondenti. Questo passo esige che siasi dapprima estesa la cerchia degli elementi propriamente detti dello spazio coll'introduzione degli immaginarii, — in modo affatto analogo a quello in cui l'introduzione delle trasformazioni reciproche nel gruppo fondamentale porta con sè quella contemporanea del punto e del piano come elementi dello spazio. Non è qui il luogo di diffondersi sull'opportunità dell'introduzione degli elementi immaginarii, per mezzo dei quali solamente si giunge alla corrispondenza perfetta fra la scienza dello spazio e il campo, qual è stato scelto, delle operazioni algebriche. Bisogna invece ben notare che la ragione di tale introduzione sta appunto nella considerazione di operazioni algebriche, e non già nel gruppo delle trasformazioni proiettive e reciproche. E come per queste ultime possiamo limitarci a trasformazioni reali, perchè le collineazioni e reciprocità reali formano già di per sè un gruppo; — così pure noi possiamo introdurre elementi immaginarii dello spazio, anche se non ci poniamo dal punto di vista proiettivo, e lo dobbiamo fintanto che studiamo per principio forme algebriche.

Come si abbiano a concepire le proprietà metriche dal punto di vista proiettivo, lo si determina secondo la proposizione generale del paragrafo precedente. Le proprietà metriche debbono considerarsi come relazioni proiettive rispetto ad una forma fondamentale, il cerchio immaginario all'infinito (1), forma

---

(1) Questo modo di considerazione va ritenuto come una delle più belle cose [della scuola francese]; solo per mezzo di esso vien precisata la distinzione fra proprietà di posizione e proprietà metriche, quale si suol dare in principio della geometria proiettiva.

che ha la proprietà di trasformarsi in sè stessa in quelle sole trasformazioni proiettive che appartengono altresì al gruppo principale. La proposizione enunciata così semplicemente richiede ancora un'aggiunta essenziale, che corrisponde alla restrizione delle ordinarie vedute agli elementi (e alle trasformazioni) reali. Per esser d'accordo con questo punto di vista, bisogna ancora aggiungere espressamente al cerchio immaginario all'infinito il sistema degli elementi (punti) reali dello spazio; le proprietà nel senso della geometria elementare sono perciò proiettivamente o proprietà dei corpi a sè, ovvero relazioni fra essi e questo sistema degli elementi reali, fra essi e il cerchio immaginario all'infinito, fra essi ed entrambi.

E qui conviene por mente ancora al modo in cui v. STAUDT nella sua Geometria di posizione istituisce la geometria proiettiva, — e cioè quella geometria proiettiva che si limita a mettere come fondamentale il gruppo di tutte le trasformazioni proiettivo-reciproche reali (1).

È noto come in quell'opera egli dal materiale d'osservazione ordinario estragga solo quei fatti che si conservano anche nelle trasformazioni proiettive. Volendo procedere oltre anche alla considerazione di proprietà metriche, si dovrebbero introdurre queste ultime appunto come relazioni rispetto al cerchio immaginario all'infinito. Il processo d'idee così completato è di tanta maggior importanza per le considerazioni qui esposte, in quanto che è possibile di costruire un analogo edifizio geometrico secondo lo spirito di ciascuno dei singoli metodi che ancora tratteremo.

§ 4.

Trasporto mediante rappresentazione.

Prima di proceder oltre nella discussione dei metodi geometrici che si presentano accanto alla geometria elementare e alla proiettiva, svilupperemo in generale alcune considerazioni che occorreranno sempre di nuovo in seguito, e per cui le cose accennate finora dànno già esempi a sufficienza. A tali discussioni si riferiscono il paragrafo presente e il successivo.

Poniamo di aver esaminata una varietà A con un gruppo B come fondamentale. Se allora per mezzo di una qualche trasformazione si cambia A

(1) La cerchia più estesa che comprende anche trasformazioni immaginarie fu dallo STAUDT messa a base solo nei suoi « *Beiträge zur Geometrie der Lage* ».

in un'altra varietà A', dal gruppo B di trasformazioni di A in sè stessa otterremo ora un nuovo gruppo B', le cui trasformazioni si riferiranno ad A'. È allora un principio che si comprende da sè, che *la trattazione di A con B come fondamentale ci dà quella di A' con a base B';* cioè ogni proprietà di una forma contenuta in A relativamente al gruppo B ne dà una della forma corrispondente in A' con riferimento al gruppo B'.

Sia per es. A una retta (punteggiata), B il gruppo delle trasformazioni lineari, in numero tre volte infinito, che la trasformano in sè stessa La maniera di trattare A è allora quella appunto che la nuova algebra chiama « teoria delle forme binarie ». Ora la retta A possiamo riferirla ad una conica A' del piano, mediante proiezione da un punto di quest'ultima. Le trasformazioni lineari B della retta in sè stessa dànno luogo allora, come facilmente si prova, a quelle B' della conica in sè medesima; ossia alle trasformazioni di questa derivanti da quelle lineari del piano, che mutano la conica in sè stessa.

Ma, conforme al principio del secondo paragrafo (1), è indifferente di studiare la geometria sopra una conica, pensandola come fissa e riferendosi a quelle sole trasformazioni lineari del piano che non la alterano; ovvero di studiare la geometria su quella conica, considerando in generale le trasformazioni lineari del piano, e lasciando variare assieme ad esse la conica stessa. Le proprietà che scorgevamo nei sistemi di punti sulla conica sono allora proiettive nel senso ordinario. Annodando quest'ultima considerazione al risultato testè ottenuto, abbiamo dunque:

La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva dei sistemi di punti su di una conica sono la stessa cosa; ossia ad ogni proposizione sulle forme binarie ne corrisponde una sopra questi sistemi di punti, e inversamente (2).

Un altro esempio atto a render più evidente questo genere di considerazioni è il seguente. Mettendo in relazione una quadrica con un piano col mezzo della proiezione stereografica, otteniamo su quella superficie un punto fondamentale: il centro di proiezione; e nel piano, due: le tracce delle generatrici passanti per esso centro. Ora, si può dimostrare senz'altro, che le trasformazioni lineari del piano che lasciano inalterati i suoi due punti fondamentali dànno luogo, per mezzo della rappresentazione, a trasformazioni lineari della quadrica in sè stessa, ma a quelle solamente che non alterano il centro di pro-

---

(1) Se vogliamo, il principio è applicato qui sotto una forma un po' più generale.

(2) Invece della conica nel piano possiamo introdurre, con egual successo, una cubica gobba, e in generale, nel caso di n dimensioni, qualcosa di analogo.

iezione. (Chiamiamo trasformazioni lineari della quadrica in sè stessa quelle ch'essa subisce quando si operano trasformazioni lineari dello spazio che la sovrappongono a sè medesima.) Divengono per tal modo identiche la trattazione proiettiva di un piano nel quale si fissino due punti come fondamentali e quella di una quadrica in cui se ne fissi uno. La prima — qualora si considerino anche gli elementi immaginarii — non è altro che la trattazione del piano nel senso della geometria elementare. Infatti il gruppo principale di trasformazioni piane si compone appunto di quelle trasformazioni lineari che lasciano inalterata una coppia di punti (i punti ciclici). Otteniamo quindi in conclusione:

La geometria elementare del piano e la trattazione proiettiva di una quadrica con un suo punto come fondamentale sono la stessa cosa.

Tali esempi si potrebbero moltiplicare a piacere [1]; i due qui svolti furono scelti perchè in seguito avremo ancora occasione di tornarvi sopra.

§ 5.

Dell'arbitrarietà nella scelta dell'elemento dello spazio. Principio di trasporto di Hesse. Geometria della retta.

Come elemento della retta, del piano, dello spazio, e in generale di una varietà da esaminare possiamo prendere, in luogo del punto, qualunque forma contenuta nella varietà stessa: il gruppo di punti, eventualmente la curva, la superficie, ecc. (v. nota IV). Non essendovi a priori nulla affatto di fisso intorno al numero di parametri arbitrarii da cui tali forme si vogliono far dipendere, la retta, il piano, lo spazio, ecc. appariranno, a seconda della scelta dell'elemento, come varietà a quante si vogliano dimensioni. *Ma fintanto che poniamo a base della trattazione geometrica uno stesso gruppo di trasformazioni, il contenuto della Geometria rimane inalterato;* ossia ogni teorema ottenuto adottando un certo elemento dello spazio è anche un teorema qualora se ne adotti un altro qualunque; si cambiano solamente l'ordine e il collegamento delle proposizioni.

(1) Per altri esempi, come anche in particolare per le estensioni al caso di più dimensioni, di cui sono suscettibili quelli qui riportati, rinvio a quanto espongo in una mia Memoria: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.* Math. Annalen, t. V, 2, come pure ai lavori di Lie che tosto citerò ancora.

L'essenziale è dunque il gruppo di trasformazioni; il numero di dimensioni che vogliamo attribuire alle varietà appare come qualcosa di secondario.

Collegando quest'osservazione al principio del paragrafo precedente, si ottiene una serie di belle applicazioni, alcune delle quali noi svilupperemo, perchè tali esempi sembrano più adatti che ogni lunga spiegazione a stabilire il significato della considerazione generale.

La geometria proiettiva sulla retta (la teoria delle forme binarie) equivale, in forza del paragrafo precedente, alla geometria proiettiva sulla conica. Su quest'ultima consideriamo ora come elemento, in luogo del punto, la coppia di punti. Ma il complesso delle coppie di punti di una conica si può riferire al sistema delle rette del piano, facendo corrispondere ad ogni retta la coppia di punti in cui essa taglia la conica stessa. Mediante questa rappresentazione le trasformazioni lineari della conica in sè stessa dànno luogo a quelle del piano (rigato) che la lasciano inalterata. Secondo il § 2 è poi indifferente di considerare solo il gruppo di queste ultime trasformazioni, oppure il complesso di tutte quelle lineari del piano, aggiungendo volta per volta la conica data alle forme del piano che dobbiamo esaminare. Riunendo tutte queste considerazioni, abbiamo:

La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva del piano con una conica come fondamentale sono identiche.

E poichè infine, appunto per l'uguaglianza del gruppo, la geometria proiettiva del piano con una conica come fondamentale coincide colla geometria metrico-proiettiva che si può istituire nel piano sopra una conica (v. nota V), possiamo anche dire così:

La teoria delle forme binarie e la geometria metrico-proiettiva generale nel piano sono la stessa cosa.

In luogo della conica nel piano potremmo introdurre nella considerazione precedente una cubica gobba nello spazio, ecc., ma non staremo a sviluppare questo concetto. La connessione qui stabilita fra la geometria del piano e poi dello spazio o di una varietà comunque estesa non costituisce essenzialmente altro che il principio di trasporto proposto da Hesse (Borchardt's Journal, Vol. 66).

Un esempio molto affine l'abbiamo nella geometria proiettiva dello spazio, ovvero, in altri termini, nella teoria delle forme quaternarie. Assumendo la retta come elemento dello spazio, e attribuendole, come si fa nella geometria della retta, sei coordinate omogenee, fra cui passa una relazione di condizione quadratica, le collineazioni e reciprocità dello spazio appaiono siccome

quelle trasformazioni lineari delle sei variabili supposte indipendenti, che trasformano in sè stessa la relazione di condizione. Applicando considerazioni analoghe a quelle testè sviluppate, otteniamo da ciò la proposizione seguente:

La teoria delle forme quaternarie coincide colla determinazione metrica proiettiva in una varietà rappresentabile con sei variabili omogenee.

Per una più minuta esposizione di un tale concetto, rinvio ad una memoria che comparirà fra poco nei Math. Annalen (vol. VI) « *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* [*Zweite Abhandlung*] », come pure ad una nota al termine di quest'opuscolo (v. nota VI).

Aggiungerò alle spiegazioni precedenti altre due osservazioni, delle quali la prima è bensì già implicitamente contenuta nelle cose dette finora, ma vuol essere più sviluppata, perchè l'argomento cui si riferisce va soggetto facilmente a malintesi

Introducendo forme qualunque come elementi dello spazio, questo può acquistare quante si vogliano dimensioni. Ma se ci atteniamo al metodo di trattazione a noi più famigliare (quello elementare o quello proiettivo), allora il gruppo che dobbiamo assumere come fondamentale per la varietà a più dimensioni ci è dato a priori, ed è appunto rispettivamente il gruppo principale o quello delle trasformazioni proiettive. Volendone assumere un altro, dovremmo uscire risp. dall'intuizione elementare o da quella proiettiva. Adunque, se è vero che, mediante una scelta conveniente dell'elemento dello spazio, quest'ultimo può rappresentare varietà a quante si vogliano dimensioni, importa però anche di aggiungere che *con questa rappresentazione o bisogna mettere fin dà prima un determinato gruppo a base della trattazione della varietà, ovvero, volendo disporre del gruppo, dobbiamo poi conformarvi la nostra intuizione geometrica.* — Senza quest'osservazione si potrebbe per es cercare una rappresentazione della geometria della retta nel modo seguente. Alla retta si attribuiscono in quest'ultima sei coordinate; e altrettanti coefficienti ha la conica nel piano. Immagine della geometria della retta sarebbe dunque la geometria in un sistema di coniche separato dal complesso delle coniche di un piano mediante una relazione quadratica tra i coefficienti. Ciò sta bene finchè poniamo come gruppo fondamentale della geometria piana il complesso dei mutamenti rappresentati dalle trasformazioni lineari dei coefficienti della conica, che trasformano in sè stessa la relazione di condizione quadratica. Ma se ci atteniamo alla trattazione elementare o a quella proiettiva della geometria piana, *non* abbiamo immagine *veruna.*

La seconda osservazione si riferisce alla nozione seguente. Sia dato nello

spazio un gruppo qualunque, per es. il gruppo principale. Si scelga una qualche forma dello spazio, per es. un punto, una retta, o anche un ellissoide, ecc., e le si applichino tutte le trasformazioni del gruppo principale. Si ottiene così una varietà più volte estesa, con un numero di dimensioni uguale, in generale, a quello dei parametri arbitrarii contenuti nel gruppo; inferiore però in casi particolari, quando cioè la forma scelta in origine abbia la proprietà di mutarsi in sè stessa mediante un numero infinito di trasformazioni del gruppo. Ad ogni varietà così generata diamo, in relazione al gruppo generatore il nome di *corpo* (1). Ora se vogliamo considerare lo spazio secondo lo spirito del gruppo, e nel tempo stesso assumere determinate forme come elementi dello spazio, senza che cose equivalenti in quel senso vengano rappresentate in modo diverso, *dovremo evidentemente scegliere gli elementi dello spazio in modo che la loro varietà costituisca essa stessa un corpo, ovvero possa decomporsi in corpi* (2). Di quest'osservazione che risulta evidente sarà fatta più avanti (§ 9) un'applicazione. La nozione di corpo ricomparirà nell'ultimo paragrafo insieme ad altre affini.

§ 6.

Geometria dei raggi reciproci. Interpretazione di $x+iy$.

Con questo paragrafo torniamo alla discussione dei diversi indirizzi d'investigazioni geometriche, che fu incominciata nei §§ 2 e 3.

Come analoga alle maniere di considerazioni della geometria proiettiva si può riguardare sotto molteplici aspetti una categoria di considerazioni geometriche, in cui si fa uso continuo delle trasformazioni per raggi reciproci. Vi appartengono le ricerche sulle così dette ciclidi e superficie anallagmatiche,

(1) Scelgo questo nome seguendo il Dedekind, il quale nella teoria dei numeri chiama « Corpo » un campo di numeri che risulti da elementi dati mediante date operazioni. (Seconda edizione delle Lezioni di Dirichlet.)

(2) [Nel testo non si fa sufficientemente attenzione al fatto che il gruppo proposto può contenere dei così detti sottogruppi *eccezionali*. Se una forma geometrica rimane inalterata nelle operazioni di un sottogruppo eccezionale, lo stesso ha luogo per tutte quelle che se ne ricavano mediante le operazioni del gruppo intero, ossia per tutte le forme del corpo che da essa risulta. Ora un corpo così costituito sarebbe affatto improprio a rappresentare le operazioni del gruppo. Non si deve dunque tener conto nel testo che dei corpi risultanti da elementi dello spazio i quali non si conservino inalterati in alcun sottogruppo eccezionale del gruppo proposto.]

sulla teoria generale dei sistemi ortogonali; inoltre ricerche sul potenziale, ecc. Se le considerazioni contenutevi non furono per anco, come le proiettive, riunite in una Geometria speciale, *che avrebbe allora per gruppo fondamentale il complesso dei mutamenti che risultano dalla composizione del gruppo principale colle trasformazioni per raggi reciproci,* questo bisogna certo attribuirlo al fatto causale, che le dette teorie non vennero finora esposte con connessione; ma i singoli autori che si occuparono di questo ramo non saranno stati lungi da una tale considerazione metodica.

Il confronto fra questa geometria dei raggi reciproci e la proiettiva si presenta da sè, appena si domandi un paragone; e perciò qui richiameremo solo l'attenzione affatto in generale sui punti seguenti:

Nella geometria proiettiva i concetti elementari sono quelli di punto, di retta, di piano. Il cerchio e la sfera sono solo casi particolari della conica e della quadrica. L'infinito della geometria elementare appare siccome un piano; la forma fondamentale a cui si riferisce la geometria stessa è una conica immaginaria all'infinito.

Nella geometria dei raggi reciproci i concetti elementari sono punto, cerchio, sfera. Retta e piano sono casi particolari di questi ultimi, caratterizzati dal fatto di contenere un certo punto — quello all'infinito — che del resto, secondo lo spirito di quel metodo, non è ulteriormente distinto dagli altri. La geometria elementare sorge allorquando ci immaginiamo questo punto come fisso.

La geometria dei raggi reciproci è suscettibile di una rappresentazione che l'avvicina alla teoria delle forme binarie e alla geometria della retta, qualora si sviluppi questa nel modo indicato dal paragrafo precedente. A tale scopo restringeremo la considerazione anzitutto alla geometria piana, e per conseguenza alla geometria dei raggi reciproci nel piano (1).

Si è già considerata la connessione che esiste fra la geometria elementare del piano e la geometria proiettiva su di una quadrica in cui si sia distinto un punto. Astraendo da quest'ultimo, e studiando quindi la geometria proiettiva sulla superficie a sè, si ha un'immagine della geometria dei raggi reciproci nel piano. Infatti è facile persuadersi (2) che, in virtù della rappresen-

(1) La geometria dei raggi reciproci sulla retta è equivalente alla trattazione proiettiva di quest'ultima, essendo le relative trasformazioni le stesse. Anche nella geometria dei raggi reciproci si può quindi parlare del *doppio rapporto* di quattro punti di una retta, e poi di un cerchio.

(2) V. il lavoro già citato: « *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* ». Math. Annalen, Bd. V.

tazione della quadrica, al gruppo di trasformazioni per raggi reciproci nel piano corrisponde il complesso delle trasformazioni lineari di quella quadrica in sè medesima. Abbiamo dunque:

La geometria dei raggi reciproci nel piano e la geometria proiettiva su di una quadrica sono la stessa cosa;

ed in modo affatto analogo:

La geometria dei raggi reciproci nello spazio si identifica colla trattazione proiettiva di una varietà rappresentata da un' equazione omogenea di secondo grado fra cinque variabili.

La geometria dello spazio è messa dunque, mediante quella dei raggi reciproci, in relazione con una varietà a quattro dimensioni, nello stesso modo in cui [mediante la geometria projettiva] è messa con altra a cinque dimensioni.

La geometria dei raggi reciproci nel piano — finchè si vogliono considerare solo le trasformazioni *reali* — permette di fare anche da un altro lato una rappresentazione ed applicazione interessante. Infatti, distendendo una variabile complessa $x + iy$ nel piano al modo solito, alle sue trasformazioni lineari corrisponde il gruppo dei raggi reciproci, colla detta restrizione alla realtà (1). Ma lo studio delle funzioni di una variabile complessa, supposta soggetta a trasformazioni lineari arbitrarie, non è altro che ciò che, in un modo d'esposizione un poco diverso, si chiama teoria delle forme binarie. Dunque:

La teoria delle forme binarie trova la sua rappresentazione nella geometria dei raggi reciproci del piano reale, e precisamente in modo che anche i valori complessi delle variabili vi vengono rappresentati.

Dal piano possiamo ora salire alla quadrica, per riescire nell'abituale cerchia di vedute delle trasformazioni proiettive. Siccome noi consideravamo soli elementi reali del piano, non sarà più indifferente la scelta della quadrica, la quale evidentemente non dovrà essere rigata. In particolare possiamo assumere una sfera — come si fa anche del resto per l'interpretazione di una variabile complessa — e otteniamo per tal modo la proposizione seguente:

---

(1) [Il modo di esprimersi del testo non è esatto. Alle trasformazioni lineari $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ (in cui $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$) corrispondono quelle sole operazioni del gruppo dei raggi reciproci, nelle quali non ha luogo alcun rovesciamento degli angoli (in cui i due punti ciclici del piano non si scambiano tra di loro). Volendo abbracciare il gruppo complessivo dei raggi reciproci, bisogna considerare, accanto alle trasformazioni menzionate, anche le altre (non meno importanti) $z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$, in cui di nuovo $z' = x' + iy'$, ma $\bar{z} = x - iy$.]

La teoria delle forme binarie a variabili complesse trova la sua rappresentazione nella geometria proiettiva della superficie sferica reale.

Non ho potuto rifiutarmi di esporre altresì in una nota (v. nota VII) come questa rappresentazione dilucidi bene la teoria delle forme binarie cubiche e biquadratiche.

§ 7.

Estensione delle cose precedenti. Geometria delle sfere di Lie.

La teoria delle forme binarie, la geometria dei raggi reciproci e la geometria della retta, che furono coordinate negli scorsi paragrafi e appaiono diverse solo pel numero delle variabili, sono suscettibili di talune estensioni che adesso andremo esponendo. Esse devono contribuire a chiarire con nuovi esempi il concetto, che il gruppo il quale stabilisce la maniera di trattare campi dati può essere esteso a piacimento; aggiungasi poi particolarmente l'intenzione di stabilire, nel loro rapporto con queste riflessioni, talune considerazioni contenute in una recente Memoria del Lie [1]. La via per cui noi giungeremo alla geometria delle sfere di Lie differisce alquanto da quella battuta da quest'ultimo, in quanto che egli si appoggia a nozioni di geometria della retta, mentre noi, per attenerci maggiormente all'intuizione geometrica ordinaria e connetterci a quanto precede, assumiamo per la spiegazione relativa un numero inferiore di variabili. Le considerazioni, come già lo stesso Lie ha messo in evidenza (Göttinger Nachrichten, 1871, N. 7, 22), sono indipendenti dal numero delle variabili. Esse appartengono alla gran cerchia di investigazioni che si occupano dello studio in via proiettiva di equazioni di secondo grado a quante si vogliano variabili, ricerche a cui già spesso abbiamo accennato, e che incontreremo ancora più volte (v. § 10 ed altri).

Io parto dalla connessione che può stabilirsi fra il piano reale e la superficie sferica mediante la proiezione stereografica. Già nel § 5 abbiamo riferite fra loro la geometria del piano e quella della conica, facendo corrispondere ad ogni retta del piano la coppia di punti in cui essa taglia la conica medesima. In modo analogo possiamo stabilire una connessione fra la geometria dello spazio e quella della sfera, facendo corrispondere ad ogni piano dello spazio il cerchio in cui esso sega la sfera. Trasportando poi la geometria della

---

[1] *Partielle Differentialgleichungen und Complexe.* Math. Annalen, Bd. V.

sfera da questa al piano mediante la proiezione stereografica, con che ogni cerchio si trasforma in un cerchio, vengono così a corrispondersi:

la geometria dello spazio — che adopera come elemento il piano, come gruppo quelle trasformazioni lineari che lasciano inalterata una sfera;

la geometria piana — avente per elemento il cerchio e per gruppo quello dei raggi reciproci.

Vogliamo ora generalizzare da due lati la prima di queste geometrie, sostituendo al suo gruppo un altro più ampio. L'estensione che ne risulterà si potrà poi senz'altro trasportare alla geometria piana mediante quella rappresentazione.

In luogo delle trasformazioni lineari dello spazio di piani che mutano in sè stessa la sfera, possiamo, senza discostarcene molto, scegliere o l'insieme delle trasformazioni lineari dello spazio, ovvero il complesso delle trasformazioni di piani che [in un senso che va ancora precisato] lasciano inalterata la sfera; astraendo con ciò, l'una volta dalla sfera, l'altra dal carattere lineare delle trasformazioni da applicarsi. La prima generalizzazione si comprende senz'altro, e per questo la considereremo subito, studiandone il significato per la geometria piana; sulla seconda ritorneremo dopo, trattandosi allora di determinare anzitutto la trasformazione più generale che le corrisponde.

Le trasformazioni lineari dello spazio hanno comune la proprietà di mutare fasci e stelle di piani rispettivamente in fasci e in stelle. Ma, trasportato sulla sfera, il fascio di piani dà un fascio di cerchi, ossia una serie semplicemente infinita di cerchi che si tagliano negli stessi punti. La stella di piani dà una stella di cerchi, ossia un sistema di cerchi in numero doppiamente infinito, che tagliano ortogonalmente un cerchio fisso — quello, il cui piano ha per polo il centro della stella di piani. Alle trasformazioni lineari dello spazio corrispondono dunque sulla sfera, e quindi nel piano, trasformazioni di cerchi aventi la proprietà caratteristica di mutare fasci e stelle di cerchi rispettivamente in sistemi della stessa natura [1]. *La geometria piana che adopera il gruppo delle trasformazioni così ottenute è l'immagine dell'ordinaria geometria proiettiva dello spazio.* Come elemento del piano non potremo prendere in questa geometria il punto, perchè i punti, rispetto a quel gruppo di trasformazioni, non formano un corpo (§ 5); sceglieremo invece come elementi i cerchi.

---

[1] Queste trasformazioni sono considerate occasionalmente nell'« *Ausdehnungslehre* » del Grassmann (ediz. del 1862, pag. 278).

Nella seconda estensione che abbiamo detta bisogna anzitutto rispondere alla domanda sulla natura del corrispondente gruppo di trasformazioni. Si tratta di trovare trasformazioni di piani tali che ogni [fascio di piani coll'asse tangente alla] sfera dia luogo ad un [altro fascio] similmente posto. Per brevità d'espressione possiamo dapprima trasformare la questione per dualità, e inoltre discendere di un passo nel numero delle dimensioni; cercheremo quindi quali siano quelle trasformazioni puntuali (cioè di punti) nel piano, che ad ogni tangente di una data conica fanno corrispondere un'altra tangente di questa. A tale scopo consideriamo il piano colla sua conica come immagine di una quadrica proiettata da un punto dello spazio che non si trovi su di essa, per modo che quella conica rappresenti la curva di passaggio. Alle tangenti della conica corrisponderanno le generatrici della quadrica, e la questione proposta sarà ridotta a quest'altra: quale sia il complesso delle trasformazioni puntuali della quadrica in sè stessa, in cui le generatrici rimangono tali.

Ora di tali trasformazioni ve ne sono tante quante si vuole; infatti basta considerare il punto della superficie come intersezione delle generatrici dei due sistemi, e trasformare poi in sè stesso ciascuno di questi in un modo qualunque. Ma fra queste trasformazioni vi sono in particolare quelle lineari, e a queste solo vogliamo badare. E ciò perchè se non avessimo a che fare con una superficie, ma con una varietà a più dimensioni rappresentata da un'equazione di secondo grado, resterebbero le sole trasformazioni lineari, e le altre scomparirebbero (1).

Queste trasformazioni lineari della superficie in sè stessa trasportate nel piano per proiezione (non stereografica) dànno una trasformazione puntuale doppia, in forza della quale ad ogni tangente alla conica di passaggio corrisponde bensì di nuovo una tangente a questa, ma ad ogni altra retta corrisponde in generale una conica che ha un doppio contatto colla curva di passaggio. Questo gruppo di trasformazioni si può caratterizzare in modo molto conveniente, istituendo una determinazione metrica proiettiva basata sulla conica di passaggio. Le trasformazioni hanno allora la proprietà di mutare punti aventi, nel concetto di quella determinazione metrica, distanza nulla, ovvero punti aventi distanza costante da un altro punto fisso, in altri per cui si verifica la stessa proprietà.

(1) Proiettando stereograficamente la varietà, si ottiene il noto teorema: In varietà a più dimensioni (e già nello spazio) non vi sono altre trasformazioni conformi di punti, all'infuori di quelle comprese nel gruppo dei raggi reciproci. Nel piano invece ve ne sono quante se ne vogliono di altre. Cfr. anche i citati lavori del Lie.

Tutte queste considerazioni si possono trasportare al caso di quante si vogliano variabili; valgono quindi in particolare per la questione posta da principio e relativa alla sfera e al piano come elemento. Al risultato si può dare una forma particolarmente intuitiva, perchè l'angolo di due piani nella determinazione metrica proiettiva basata sopra di una sfera è uguale a quello (nel senso ordinario) dei cerchi secondo cui essi intersecano la sfera medesima.

Otteniamo quindi sulla sfera, e di qua sul piano, un gruppo di trasformazioni di cerchi aventi la proprietà di *trasformare cerchi tangenti (ad angolo nullo) e cerchi che ne tagliano uno fisso sotto uno stesso angolo rispettivamente in cerchi che si trovano nelle medesime condizioni.* Nel gruppo di queste trasformazioni sono comprese quelle lineari per la sfera e quelle dei raggi reciproci nel piano [1].

Ora la geometria dei cerchi che si può fondare su questo gruppo è l'analoga della *geometria delle sfere,* che Lie ha delineata per lo spazio, e che appare di segnalata importanza per le ricerche sulla curvatura delle superficie. Essa comprende la geometria dei raggi reciproci nello stesso senso in cui questa comprende a sua volta la geometria elementare. —

Le trasformazioni circolari (sferiche) ora studiate hanno in particolare la proprietà di trasformare cerchi (sfere) tangenti in altri pure tangenti. Se consideriamo tutte le curve (superficie) come inviluppi di cerchi (sfere), ne segue che due curve (superficie) tangenti verranno sempre trasformate in altre che

---

[1] [Le considerazioni del testo potrebbero rendersi essenzialmente più chiare aggiungendovi talune formole analitiche. Sia

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

l'equazione, nelle ordinarie coordinate tetraedriche, della sfera che riferiamo stereograficamente al nostro piano. Le x soggette a questa relazione di condizione acquistano allora per noi il significato di coordinate tetracicliche nel piano, e

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

diventa l'equazione generale del cerchio nel piano. Calcolando il raggio del cerchio così rappresentato, si viene ad incontrare la radice quadrata

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2},$$

che indicheremo con iu_5. Possiamo ora considerare i cerchi come elementi del piano. Il gruppo dei raggi reciproci si presenta allora come il complesso delle trasformazioni lineari omogenee di $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$ in cui $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$ si cambia in un proprio multiplo. Invece il gruppo più esteso che corrisponde alla geometria delle sfere di Lie si compone delle trasformazioni lineari delle *cinque* variabili $u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5$ che mutano $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$ in un multiplo di sè stesso.]

si troveranno nelle stesse condizioni. Le trasformazioni in questione appartengono dunque alla categoria, che considereremo più innanzi in generale, delle *trasformazioni di contatto,* cioè delle trasformazioni tali che il contatto tra forme costituite da punti è una proprietà invariantiva. Le trasformazioni circolari menzionate per le prime in questo paragrafo, accanto alle quali se ne possono porre di analoghe per le sfere, non sono trasformazioni di contatto. —
Le due sorta di estensioni che abbiamo collegate soltanto alla geometria dei raggi reciproci valgono anche in modo analogo per la geometria della retta, e in generale per lo studio proiettivo di una varietà separata mediante un'equazione di secondo grado, come già abbiamo accennato, nè qui ne tratteremo più a lungo.

§ 8.

Enumerazione di metodi ulteriori che hanno a fondamento un gruppo di trasformazioni puntuali.

La geometria elementare, quella dei raggi reciproci, ed anche la geometria proiettiva, astraendo dalle trasformazioni reciproche che portano con sè un cambio nell'elemento dello spazio, sono tutte comprese come singole parti nella gran moltitudine immaginabile di maniere di trattazione che pongono a fondamento in generale gruppi di trasformazioni puntuali. Metteremo qui in evidenza solo i tre metodi seguenti, che in ciò coincidono con quelli nominati. Benchè questi metodi siano ancora ben lungi dall'essere sviluppati in discipline indipendenti come la geometria proiettiva, pure essi compaiono, chiaramente riconoscibili, nelle ricerche più recenti (1).

1. *Gruppo delle trasformazioni razionali.*

Nelle trasformazioni razionali bisogna distinguer bene se queste sono razionali per *tutti* i punti del campo in cui si opera, e quindi dello spazio, del piano, ecc. oppure solo per i punti di una varietà contenuta nel campo stesso, ad es. di una superficie, di una curva. Solo le prime sono da applicarsi quando si tratta di delineare, nel senso inteso finora, una geometria dello spazio o del piano: le altre acquistano importanza sotto il punto di vista qui dato solo

(1) [Mentre negli esempi dati fin qui si trattava di gruppi con un numero finito di parametri, ora compajono nelle considerazioni del testo dei così detti gruppi infiniti.]

quando deve essere studiata la geometria su di una data superficie o curva. La stessa distinzione vale per l'*Analysis situs,* di cui tosto tratteremo.

Però le ricerche fatte finora, qui e là, si sono occupate essenzialmente di trasformazioni della seconda specie. Tali ricerche escono dal campo di quelle che qui dobbiamo considerare, la questione lì non essendo relativa alla geometria sulla superficie o sulla curva, ma trattandosi piuttosto di trovare criterii per cui due superficie o curve potessero essere trasformate l'una nell'altra (1). Lo schema generale che in questo lavoro si stabilisce non abbraccia già in massima il complesso di tutte le ricerche matematiche, ma riunisce solamente certi indirizzi sotto un punto di vista comune.

Per una geometria delle trasformazioni razionali, quale dovrebbe ottenersi ponendo le trasformazioni della prima specie come fondamentali, esistono finora solo i principii. Nelle forme di prima specie, sulla punteggiata ad es., le trasformazioni razionali sono identiche alle lineari, e non dànno perciò nulla di nuovo. Nel piano si conosce bensì il complesso delle trasformazioni razionali (le trasformazioni *Cremoniane*), e si sa che si ottengono mediante composizioni di quelle quadratiche. Si conoscono anche caratteri invariantivi delle curve piane; il loro genere, l'esistenza dei moduli; ma tali considerazioni non furono ancora svolte propriamente in una geometria del piano nel senso qui inteso. Nello spazio l'intera teoria è appena al suo sorgere: delle trasformazioni razionali se ne conoscono finora solo poche, e queste si adoperano per mettere in relazione, mediante la rappresentazione, superficie note con altre ignote.

2. *Analysis situs.*

Nella così detta *Analysis situs* si cerca ciò che rimane in seguito a mutamenti risultanti dalla composizione di deformazioni infinitesime. Anche qui, come già si è detto, bisogna distinguere se dobbiamo supporre oggetto della

(1) [Da un altro lato esse trovano posto di nuovo e benissimo fra le considerazioni del testo, cosa che nel 1872 non mi era ancor nota. Data una forma algebrica qualunque (curva, o superficie, ecc.), la si trasporti in uno spazio superiore, introducendo come coordinate i rapporti

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \dots\dots\dots : \varphi_p ,$$

dei relativi integrandi di prima specie. In questo spazio non abbiamo allora che da mettere semplicemente a base della considerazione ulteriore il gruppo delle trasformazioni lineari omogenee delle φ. Vedi diversi lavori dei sig.i Brill, Nöther e Weber, come pure la mia recente Memoria: *Zur Theorie der Abel'schen Functionen,* nel vol. 36 dei Math. Annalen.]

trasformazione tutto il campo, quindi ad es. lo spazio, o solo una varietà in esso contenuta, per es. una superficie. Le trasformazioni della prima specie sono quelle che si potrebbero mettere a base di una geometria dello spazio. Il loro gruppo sarebbe costituito in modo essenzialmente diverso da quelli considerati finora. Abbracciando tutte quelle variazioni che si compongono mediante trasformazioni puntuali infinitamente piccole supposte reali, il gruppo stesso porta con sè per principio la restrizione ad elementi reali dello spazio, e ci conduce nel campo della funzione arbitraria. Si può estendere in modo conveniente questo gruppo di trasformazioni, collegandolo ancora alle collineazioni reali che modificano anche gli elementi all'infinito.

3. *Gruppo di tutte le trasformazioni puntuali.*

Quantunque rispetto a questo gruppo nessuna superficie possegga più proprietà particolari, potendo una qualunque, con trasformazioni di esso, dar luogo ad ogni altra, vi sono tuttavia forme più elevate, nel cui studio questo gruppo trova applicazione vantaggiosa. Nella trattazione della geometria che qui è posta a fondamento può essere indifferente che queste forme finora siano state considerate, non tanto come geometriche, ma solo come forme analitiche le quali trovarono per caso applicazione geometrica, e che nel loro studio si siano usati processi (come appunto trasformazioni puntuali arbitrarie) che solo negli ultimi tempi si sono cominciati a considerare come trasformazioni geometriche. Tra queste forme analitiche vi sono anzitutto le espressioni differenziali omogenee, e subito dopo anche le equazioni alle derivate parziali. Nella discussione generale di queste sembra però, come verrà esposto nel paragrafo seguente, che il gruppo più esteso costituito da tutte le trasformazioni di contatto sia ancora più vantaggioso.

Il teorema principale che sussiste nella geometria basata sul gruppo di tutte le trasformazioni puntuali è che *una trasformazione puntuale per una porzione infinitesima dello spazio è sempre equivalente ad una trasformazione lineare.* Le teorie della geometria proiettiva ricevono così applicazione all'infinitesimo, e *in ciò riposa* — sia pur arbitraria la scelta del gruppo nella trattazione della varietà — *un carattere distintivo della trattazione proiettiva.*

Ed ora, dopo che già da lungo tempo più non parlavamo del rapporto di trattazioni, i cui gruppi fondamentali si comprendono a vicenda, daremo qui un nuovo esempio della teoria generale del § 2. Proponiamoci la questione, come debbansi concepire le proprietà proiettive dal punto di vista di « tutte le

trasformazioni puntuali », astraendo in ciò dalle trasformazioni reciproche, che veramente appartengono pure al gruppo della geometria proiettiva. La questione coincide allora con quest'altra: con quale condizione dal complesso delle trasformazioni puntuali si possa separare il gruppo di quelle lineari. Caratteristica di queste si è di far corrispondere ad ogni piano un piano; esse sono quelle trasformazioni puntuali mediante cui si conserva la varietà dei piani (ovvero, il che fa lo stesso, delle rette). *La geometria proiettiva si ottiene dunque da quella di tutte le trasformazioni puntuali coll'aggiunta della varietà dei piani, nello stesso modo in cui la geometria elementare si ha dalla proiettiva mediante l'aggiunta del cerchio immaginario all'infinito.* In particolare, dal punto di vista di tutte le trasformazioni puntuali, dobbiamo concepire per es. la designazione di una superficie quale algebrica e di un certo ordine come una relazione invariantiva rispetto alla varietà dei piani. Questo diventa ben chiaro quando, seguendo il GRASSMANN, si deriva la generazione delle forme algebriche dalla loro costruzione lineale.

§ 9.

Sul gruppo di tutte le trasformazioni di contatto.

A dir vero le trasformazioni di contatto furono già da lungo tempo considerate in casi particolari; anche JACOBI fece già uso di quelle più generali in ricerche analitiche; ma nella vera intuizione geometrica esse furono introdotte soltanto con recenti lavori del LIE (1). Non è perciò punto superfluo di spiegare qui espressamente cosa sia una trasformazione di contatto; e in questo, come sempre, ci limiteremo allo spazio punteggiato colle sue tre dimensioni.

Per trasformazione di contatto deve intendersi, analiticamente parlando, qualunque sostituzione capace di esprimere i valori delle variabili x, y, z e le loro derivate parziali $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$ mediante nuove x', y', z', p', q'. Allora è evidente che superficie tangenti si trasformano in generale di nuovo in su-

(1) Vedi il lavoro già citato: *Ueber partielle Differentialgleichungen und Complexe,* Math. Annalen, Bd. V. — Quanto dico nel testo relativamente alle equazioni alle derivate parziali l'ho desunto essenzialmente da comunicazioni orali del LIE. Vedi la nota di lui: *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen.* Göttinger Nachrichten. Oct. 1872.

perficie tangenti, il che dà ragione del nome di trasformazioni di contatto. Partendo dal punto come elemento dello spazio, le trasformazioni di contatto si dividono in tre classi; quelle che ai punti, in numero triplicemente infinito, fanno corrispondere ancora punti, — e queste sono le trasformazioni puntuali testè considerate —, quelle che li trasformano in curve, e finalmente quelle che li mutano in superficie. Questa divisione non deve considerarsi come essenziale, in quanto che, usando per lo spazio altri elementi, pure in numero tre volte infinito, per es. i piani, si presenta bensì ancora una divisione in tre gruppi, la quale però non coincide con quella che aveva luogo in base alla considerazione dei punti.

Applicando ad un punto tutte le trasformazioni di contatto, esso dà luogo al complesso di tutti i punti, curve e superficie. Punti, curve, superficie formano dunque tutti assieme un *corpo* del nostro gruppo. Da ciò possiamo desumere la regola generale, che la trattazione formale di un problema in relazione a tutte le trasformazioni di contatto (e quindi per es. la teoria delle equazioni alle derivate parziali che tosto accenneremo) deve restare incompiuta finchè si opera con sole coordinate di punti (o di piani), poichè gli elementi dello spazio posti a fondamento non costituiscono punto un corpo.

Non è possibile però, volendo restare in connessione coi metodi ordinarii, di introdurre come elementi dello spazio tutti gli individui contenuti nel detto corpo, essendo il loro numero infinite volte infinito. Da ciò la necessità di introdurre in tali considerazioni come *elemento dello spazio,* non già il punto, la curva o la superficie, ma l'*elemento superficiale,* ossia il sistema di valori di x, y, z, p, q. In qualunque trasformazione di contatto da ogni elemento superficiale se ne ha un altro; tali elementi, in numero cinque volte infinito, formano dunque un corpo.

Sotto questo punto di vista bisogna concepire egualmente il punto, la curva e la superficie come aggregati di elementi superficiali, e precisamente in numero due volte infinito. Infatti la superficie vien ricoperta da ∞^2 di tali elementi, la curva toccata da altrettanti, e altrettanti ne passano per il punto. Ma questi aggregati di ∞^2 elementi hanno comune ancora una proprietà caratteristica. Si chiami *posizione unita* di due elementi superficiali consecutivi x, y, z, p, q e $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $p+dp$, $q+dq$ la relazione rappresentata da

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Allora il punto, la curva e la superficie sono tutti egualmente *varietà ad* ∞^2

elementi, di cui ciascuno giace in posizione unita cogli ∞^1 *suoi vicini.* Per tal modo punto, curva, superficie sono caratterizzati in una stessa maniera, e così devono anche essere rappresentati analiticamente, se si vuol assumere come fondamentale il gruppo delle trasformazioni di contatto.

La posizione unita di elementi consecutivi è una relazione invariantiva per qualunque trasformazione di contatto. Anche reciprocamente però le trasformazioni di contatto possono definirsi siccome *quelle sostituzioni delle cinque variabili* x, y, z, p, q, *mediante cui la relazione* $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ *viene trasformata in sè stessa.* In tali ricerche adunque lo spazio deve considerarsi come una varietà a cinque dimensioni, varietà da trattarsi prendendo per gruppo fondamentale il complesso di tutte le trasformazioni delle variabili che lasciano inalterata una relazione determinata fra i differenziali.

Saranno in primo luogo oggetto dello studio quelle varietà che si rappresentano con una o più equazioni fra le variabili, ossia *le equazioni alle derivate parziali di primo ordine ed i loro sistemi.* Una questione capitale si è quella, in qual modo dalle varietà di elementi che soddisfanno a date equazioni si possano separare serie semplicemente o doppiamente infinite di elementi, di cui ciascuno sia in posizione unita con un vicino. A una tale questione si riduce per es. il problema della risoluzione di un'equazione alle derivate parziali di primo ordine. Possiamo formularlo così: Fra gli ∞^4 elementi che verificano l'equazione separare tutte le varietà a due dimensioni della detta specie. In particolare, il problema della soluzione completa assume ora questa forma precisa: eseguire una ripartizione degli ∞^4 elementi che verificano l'equazione in un numero doppiamente infinito di siffatte varietà.

Qui non può essere nostra intenzione di proseguire tale considerazione sulle equazioni alle derivate parziali; a questo proposito rinvio ai citati lavori del Lie. Metteremo solo ancora in evidenza che, sotto il punto di vista delle trasformazioni di contatto, un'equazione alle derivate parziali di primo ordine non ha invarianti, che ciascuna può essere trasformata in ogni altra, e che quindi in particolare le equazioni lineari non hanno nulla di speciale. Differenze si introducono solo quando si ritorna al punto di vista delle trasformazioni puntuali.

I gruppi delle trasformazioni di contatto, di quelle puntuali ed infine delle trasformazioni proiettive sono caratterizzabili in un modo unico che qui non posso omettere (¹). Le trasformazioni di contatto si sono definite siccome quelle

(¹) Queste definizioni le devo ad un'osservazione di Lie.

in cui si conserva la posizione unita di elementi superficiali consecutivi. Le trasformazioni puntuali hanno invece la proprietà caratteristica di mutare elementi lineari consecutivi in posizione unita in altrettali: e finalmente le collineazioni e le reciprocità conservano la posizione unita di elementi di connesso consecutivi. Intendiamo per « elemento di connesso » l'unione di un elemento superficiale con uno lineare in esso contenuto; ed elementi di connesso consecutivi si diranno in posizione unita quando non solo il punto, ma anche l'elemento lineare dell'uno è contenuto in quello superficiale dell'altro. La denominazione (del resto provvisoria) di « elemento di connesso » si riferisce alle forme recentemente introdotte da CLEBSCH nella Geometria (1), che si rappresentano mediante un'equazione contenente nel tempo stesso serie di coordinate di punti, di piani e di rette, ed i cui analoghi nel piano CLEBSCH chiama « connessi ».

§ 10.

Sulle varietà a quante si vogliano dimensioni.

Già più volte abbiamo notato che, nel collegare le spiegazioni date finora alla concezione dello spazio, noi non avevamo altro scopo che di poter più facilmente svolgere i concetti astratti coll'appoggiarci ad esempi visibili. Per sè, le considerazioni sono indipendenti dalla figura sensibile, e appartengono al campo generale di ricerche matematiche, che si chiama teoria delle varietà estese, o brevemente (secondo il GRASSMANN) scienza dell'estensione (*Ausdehnungslehre*). È evidente in qual modo si debba riportare quanto precede dallo spazio al puro concetto di varietà. Ed osserviamo qui ancora una volta che nella ricerca astratta abbiamo, rispetto alla geometria, il vantaggio di poter scegliere affatto ad arbitrio il gruppo di trasformazioni che vogliamo assumere come fondamentale, mentre nella geometria era dato a priori un gruppo assai ristretto, il gruppo principale.

Accenneremo qui ancora solo, ed anche assai brevemente, ai tre metodi di trattazione seguenti.

---

(1) Gött. Abhandlungen, 1872 (Bd. 17): *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie,* come pure: Gött. Nachrichten, 1872, Nr. 22: *Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie des Raumes.*

1. *Trattazione proiettiva, ovvero algebra moderna. (Teoria degli invarianti.)*

Il suo gruppo si compone del complesso delle trasformazioni lineari e reciproche delle variabili usate per la rappresentazione dell'elemento nella varietà; essa è la generalizzazione della geometria proiettiva. Già si è rilevato come questa specie di trattazione possa applicarsi alla discussione dell'infinitesimo in una varietà con una dimensione di più. Essa comprende le due specie di trattazione che ancora dobbiamo menzionare, in quanto che il suo gruppo abbraccia i gruppi fondamentali di queste.

2. *Varietà a curvatura costante.*

Il concetto di una tale varietà sorse in Riemann, derivando da quello più generale di una varietà in cui è data un'espressione differenziale delle variabili. Il gruppo consiste per lui nell'insieme delle trasformazioni delle variabili che lasciano inalterata l'espressione proposta. Alla rappresentazione di una varietà a curvatura costante si giunge da un altro lato, qualora si istituisca una determinazione metrica nel senso proiettivo basata su di una data equazione di secondo grado fra le variabili. In questo modo si introduce un'estensione, di fronte al modo del Riemann, in quanto che le variabili si suppongono complesse; però si può poi restringere la variabilità al campo reale. A questo ramo appartiene la gran serie di ricerche che abbiamo accennate nei §§ 5, 6, 7.

3. *Varietà piana.*

Varietà piana è chiamata dal Riemann quella a curvatura costante e nulla. La sua teoria è l'immediata generalizzazione della geometria elementare. Il suo gruppo, — come il gruppo principale della geometria —, può esser separato da quello della geometria proiettiva col tener fissa una forma rappresentata da due equazioni, una di secondo ed una di primo grado. In ciò si deve poi far distinzione fra reale e immaginario, qualora si voglia attenersi alla forma sotto cui la teoria viene di solito esposta. Qui sono da porsi anzitutto la geometria elementare stessa, poi per es. le generalizzazioni dell'ordinaria teoria della curvatura sviluppate negli ultimi tempi, ecc.

Osservazioni finali.

Per finire, potremo fare ancora due osservazioni, le quali sono in istretta relazione con quanto si è esposto finora; l'una si riferisce al formalismo con cui si debbono rappresentare gli sviluppi relativi alle cose precedenti; l'altra deve porre in evidenza alcuni problemi, la cui considerazione dopo le spiegazioni che qui furon date appare importante e vantaggiosa.

Spesso si è fatto alla geometria analitica il rimprovero di avvantaggiare elementi arbitrarii coll'introduzione del sistema di coordinate, e questo rimprovero colpisce parimente tutte le trattazioni di varietà estese che caratterizzano l'elemento mediante i valori di certe variabili. Se un tale rimprovero era troppo spesso giustificato dal modo difettoso con cui, specialmente in principio, si maneggiava il metodo delle coordinate, esso però vien meno dinanzi ad una trattazione razionale del metodo stesso. Le espressioni analitiche che possono sorgere nello studio di una varietà in relazione ad un certo gruppo, devono essere, per quel che riguarda il loro significato, indipendenti dal sistema di coordinate, in quanto che questo è scelto a caso, e si tratta quindi di render evidente anche nella forma tale indipendenza. Che ciò sia possibile, e come s'abbia a fare, lo mostra l'algebra moderna, in cui la nozione formale di invariante, di cui qui si tratta, sta impressa in una maniera più chiara che mai. Essa possiede una legge di formazione generale e completa delle espressioni invariantive, ed opera per principio con queste sole. La stessa questione deve porsi nella trattazione formale anche quando si hanno gruppi fondamentali diversi dal proiettivo (1). Poichè il formalismo deve identificarsi colla concezione, sia che si voglia considerarlo solo come espressione precisa e chiara di quest'ultima, sia che vogliamo servircene per penetrare col suo mezzo in campi inesplorati.

Per stabilire i problemi di cui vogliamo ancora far menzione occorre un confronto fra le osservazioni esposte e la così detta teoria delle equazioni di Galois.

Nella teoria di Galois, come anche qui, l'importanza si concentra nei *gruppi* di mutamenti. Gli oggetti a cui si riferiscono i mutamenti sono bensì differenti; là si ha da fare con un numero finito di elementi discreti, qui invece col numero infinito degli elementi di una varietà continua Ma pos-

(1) [Ad esempio pel gruppo delle rotazioni dello spazio a tre dimensioni intorno ad un punto fisso i quaternioni forniscono un tale formalismo.]

siamo tuttavia spinger oltre il confronto, a motivo dell'identità della nozione di gruppo [1]; e qui conviene accennarvi, tanto più che ne verrà caratterizzata la posizione da attribuirsi a talune ricerche incominciate da Lie e da me [2] in relazione alle considerazioni qui svolte.

Nella teoria del Galois, quale viene esposta per es. nel *Traité d'Algèbre supérieure* del Serret, oppure nel *Traité des substitutions* di C. Jordan, è oggetto proprio della ricerca la teoria stessa dei gruppi o delle sostituzioni, e quella delle equazioni ne scaturisce come un'applicazione. Analogamente noi vogliamo una *teoria delle trasformazioni*, una dottrina cioè dei gruppi che possono ottenersi con trasformazioni di data natura. I concetti di permutabilità, similitudine, ecc., vi troveranno applicazione come nella teoria delle sostituzioni. La trattazione delle varietà che nasce dal mettere a fondamento i gruppi di trasformazioni appare dunque come un'applicazione della teoria delle trasformazioni.

Nella teoria delle equazioni interessano anzitutto le funzioni simmetriche dei coefficienti, ma subito dopo quelle espressioni che rimangono inalterate, se non in tutte, almeno in gran parte degli scambi delle radici. Nella trattazione di una varietà con un certo gruppo come fondamentale noi cerchiamo analogamente anzitutto i corpi (§ 5) e le forme che rimangono inalterate in tutte le trasformazioni del gruppo. Vi sono però forme che ammettono non tutte, ma alcune delle trasformazioni del gruppo stesso, e queste offrono un'interesse speciale relativamente alla trattazione fondata su di esso, hanno cioè proprietà particolari. Questo equivale a mettere in evidenza per es. nella geometria ordinaria corpi simmetrici e regolari, superficie di rotazione ed elicoidali. Ponendosi invece dal punto di vista della geometria proiettiva, e richiedendo in particolare che le trasformazioni per cui le forme si mutano in sè stesse siano permutabili, si giunge alle forme considerate da Lie e da me nel lavoro citato, e al problema generale posto al § 6 di esso. La determinazione datavi nei §§ 1 e 3 di tutti i gruppi di infinite trasformazioni lineari permutabili nel piano è una parte della teoria generale delle trasformazioni testè menzionata [3].

---

(1) Ricordo qui che Grassmann già nell'introduzione alla prima edizione della sua « *Ausdehnungslehre* » (1844) confronta l'analisi combinatoria colla scienza dell'estensione.

(2) Vedi la Memoria comune: *Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen*. Math. Annalen, Bd. IV.

(3) Nel testo debbo astenermi dal mostrare il vantaggio che la considerazione delle trasformazioni infinitesime ha per la teoria delle equazioni differenziali. Nel § 7 del lavoro

NOTE.

I. *Sul contrasto fra l'indirizzo sintetico e quello analitico nella geometria moderna.*

La differenza fra la nuova geometria sintetica e la nuova geometria analitica non deve più considerarsi oggigiorno come essenziale, poichè i concetti e le argomentazioni si sono informati a poco a poco dall'una e dall'altra parte in modo affatto simile. Perciò noi scegliamo nel testo la denominazione di « geometria proiettiva » per indicarle entrambe. Se il metodo sintetico procede di più per mezzo dell'intuizione dello spazio, accordando così alle sue prime e semplici teorie un'attrattiva non comune, tuttavia il campo di tale intuizione non è chiuso al metodo analitico, e le formole della geometria analitica si possono concepire come espressione esatta e trasparente delle relazioni geometriche. D'altra parte non bisogna tenere in poco conto il vantaggio che un formalismo ben fondato offre al processo dell'investigazione, precedendo in certa misura il pensiero. Bisogna bensì attenersi sempre al principio di non considerare come esaurito un argomento matematico, finchè esso non è divenuto evidente nel concetto; e l'avanzare col mezzo del formalismo non è appunto che un primo passo, ma già molto importante.

II. *Distinzione della geometria odierna in discipline.*

Quando si osserva per es. come in generale il fisico matematico si priva dei vantaggi che in molti casi gli potrebbe accordare un'osservazione proiettiva anche poco sviluppata, e come d'altra parte il proiettivo non pon mano alla

---

citato Lie ed io abbiamo mostrato che: le equazioni differenziali ordinarie che ammettono eguali trasformazioni infinitesime presentano uguali difficoltà d'integrazione. In qual modo siano da usarsi tali considerazioni per le equazioni alle derivate parziali lo ha esposto Lie in luoghi diversi, fra gli altri nella Memoria menzionata dapprima (Math. Annalen, Bd. V) con vari esempi. (Vedi in particolare i Rendiconti dell'Accademia di Cristiania, maggio 1872.)

[Posso oggi accennare al fatto che appunto i due problemi menzionati nel testo han continuato a dar l'indirizzo ad una gran parte dei lavori ulteriori di Lie e miei. Già prima ho ricordata la pubblicazione del 1.° volume della *Theorie der Transformationsgruppen* del Lie. Quanto alle mie ricerche posteriori al presente scritto si possono quì considerare quelle sui corpi regolari, sulle funzioni modulari ellittiche ed in generale sulle funzioni univoche con trasformazioni lineari in sè stesse. Ho già esposte le prime nel 1884 in un'opera speciale: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades* (Leipzig, 1884); un'esposizione rimaneggiata della teoria delle funzioni modulari ellittiche è appunto ora in corso di stampa.]

ricca fonte di verità matematiche che ha dato luogo alla scoperta della teoria della curvatura delle superficie, bisogna ben ammettere che lo stato attuale della scienza geometrica è assai imperfetto, e sperare ch'esso abbia in breve a migliorare.

III. *Sull'importanza dell'intuizione dello spazio.*

Se nel testo noi accenniamo all'intuizione dello spazio come a qualcosa di secondario, lo facciamo in relazione al contenuto puramente matematico delle considerazioni da formulare. L'intuizione ha per esso il solo scopo dell'evidenza, il quale però dal lato pedagogico è da stimarsi assai. Un modello geometrico per es. è sotto questo punto di vista assai istruttivo ed interessante.

Ben diversa però è la questione sull'importanza dell'intuizione geometrica in generale. Io la considero come una cosa che sta da sè. V'ha una geometria speciale che non vuol esser riguardata, come le ricerche discusse nel testo, quale forma intuitiva di considerazioni astratte. In essa si tratta di concepire assolutamente le figure dello spazio colle forme che esse hanno effettivamente, e di intendere (ed è quello il lato matematico) le relazioni che per esse sussistono come conseguenze evidenti dei postulati sull'intuizione dello spazio. Un modello, — sia pur eseguito ed osservato, oppure solo rappresentato con evidenza, — non è per questa geometria un mezzo per raggiungere lo scopo, ma lo scopo medesimo.

Istituendo per tal modo la geometria come qualcosa a sè, accanto alla matematica pura, ma indipendentemente da essa, non facciamo certo nulla di nuovo. È desiderabile però che si metta una buona volta ed espressamente in evidenza questo punto di vista, poichè l'investigazione recente lo omette quasi totalmente. E a questo si collega il fatto che inversamente l'investigazione stessa venne di rado usata a studiare le proprietà di forma degli enti dello spazio, benchè appaia di gran vantaggio appunto in questo indirizzo.

IV. *Sulle varietà a quante si vogliano dimensioni.*

Che lo spazio, concepito come luogo di punti, abbia solo tre dimensioni, dal punto di vista matematico non va discusso; ma nello stesso modo dal punto di vista matematico non possiamo impedire ad alcuno di asserire che lo spazio abbia invece quattro o un numero illimitato di dimensioni, ma che noi siamo in grado di percepirne solamente tre. La teoria delle varietà più volte estese, che vieppiù si presenta innanzi alle nuove ricerche matematiche, è nella sua essenza del tutto indipendente da una tale asserzione. Si è però

naturalizzato in essa un modo di esprimersi che certamente proviene da quella rappresentazione. Si parla cioè, invece che degli individui di una varietà, dei punti di uno spazio superiore, ecc. Per sè, una tale espressione ha del buono, in quanto che, rammentando l'intuizione geometrica, facilita l'intelligenza. Ma essa ha avuta la conseguenza dannosa di far supporre a molti che le ricerche su varietà a quante si vogliano dimensioni fossero intimamente legate all'accennato concetto della natura dello spazio. Nulla è più privo di fondamento che una tale supposizione. Certo che le dette ricerche matematiche troverebbero subito applicazione geometrica se la rappresentazione fosse esatta, — ma il valore e lo scopo di esse riposano, affatto indipendentemente da una tale rappresentazione, nel loro proprio contenuto matematico.

Ben diverso da ciò è quanto insegnò Plücker, a concepire cioè lo spazio effettivo come una varietà a quante si vogliano dimensioni, introducendo come elemento di esso spazio (vedi § 5 del testo) una forma (curva, superficie, ecc.) dipendente da un numero arbitrario di parametri.

Il modo di rappresentazione che considera l'elemento della varietà comunque estesa come analogo al punto dello spazio fu svolto dapprima dal Grassmann nella sua « *Ausdehnungslehre* » (1844). In lui il pensiero è del tutto estraneo all'accennato concetto della natura dello spazio; questo rimonta ad osservazioni occasionali di Gauss, e divenne maggiormente noto in seguito alle ricerche di Riemann sulle varietà più volte estese, colle quali esso si è collegato.

L'uno e l'altro di questi concetti, — quello di Grassmann e quello di Plücker —, ha i suoi proprii vantaggi; ed essi si applicano alternativamente con profitto.

V. *Sulla così detta Geometria non Euclidea.*

La geometria metrica proiettiva di cui si parla nel testo coincide nella sua essenza, come hanno insegnato ricerche recenti, colla geometria metrica che si può svolgere col respingere l'assioma delle parallele, e che oggigiorno è molto discussa e agitata sotto il nome di « geometria non euclidea ». Se nel testo non abbiamo mai accennato a questo nome, si fu per un motivo che si avvicina alle spiegazioni date nella nota precedente. Si collegano col nome di geometria non euclidea una quantità d'idee non matematiche, che da un lato si curano con tanto zelo quanto dall'altro si disprezzano; ma con esse le nostre considerazioni puramente matematiche non hanno nulla a che fare. Il desiderio di apportare qualcosa a questo riguardo per rischiarare le idee dà ragione di quanto ora diremo.

Le ricerche sulla teoria delle parallele cui noi alludiamo hanno progredito in modo da raggiungere matematicamente da due lati un valore preciso.

Esse mostrano una buona volta — e questo loro ufficio può considerarsi come relativo al passato, ed ora esaurito — che l'assioma delle parallele non è conseguenza matematica di quelli che generalmente gli si premettono, ma che vi si manifesta un elemento di intuizione essenzialmente nuovo e non ancora toccato nelle ricerche precedenti. Studi consimili si potrebbero e si dovrebbero effettuare relativamente a ciascun assioma, e non solo della geometria; ci si guadagnerebbe in intelligenza nella reciproca posizione degli assiomi.

Inoltre tali ricerche ci hanno fatto dono di un prezioso concetto matematico, quello di una varietà a curvatura costante. Esso è legato più intimamente che mai, come già accennammo e come è meglio mostrato nel § 10 del testo, alla determinazione metrica proiettiva, sorta indipendentemente da ogni teoria delle parallele. Al fatto che lo studio di questa determinazione metrica offre di per sè un alto interesse matematico e permette numerose applicazioni, bisogna aggiungere che essa comprende come caso speciale (limite) la determinazione metrica data nella geometria, e ci insegna a concepirla da un punto di vista più elevato.

Del tutto indipendente da tali considerazioni è la questione, su quali fondamenti si appoggi l'assioma delle parallele; se dobbiamo considerarlo come dato in via assoluta — come vogliono gli uni — o solo come verificato approssimativamente dall'esperienza — come dicono gli altri —. Se vi fossero ragioni per accettare quest'ultima soluzione, le dette ricerche matematiche ci mostrerebbero in qual modo si avrebbe a costruire una geometria più esatta. Ma la suddetta è evidentemente una questione filosofica, che riguarda i fondamenti più generali delle nostre cognizioni. Il matematico *come tale* non s'interessa alla questione così posta, e desidera che le sue ricerche siano considerate come indipendenti da ciò che dall'una o dall'altra parte si potrà rispondere alla questione medesima.

VI. *Geometria della retta come studio di una varietà a curvatura costante.*

Nel mettere in relazione la geometria della retta colla determinazione metrica proiettiva in una varietà a cinque dimensioni, dobbiamo far attenzione al fatto che nelle rette abbiamo dinanzi a noi (nel senso della determinazione stessa) i soli elementi all'infinito della varietà. Da ciò la necessità di pensare

quali valori una determinazione metrica proiettiva attribuisca ai suoi elementi all'infinito, e di questo ci occuperemo ora un po', per allontanare alcune difficoltà che si oppongono alla concezione della geometria della retta come geometria metrica. Riferiremo queste spiegazioni all'esempio intuitivo offerto da una determinazione metrica proiettiva basata su di una superficie di second'ordine.

Una coppia di punti arbitrarii dello spazio ha relativamente alla quadrica un invariante assoluto: il doppio rapporto dei due punti e delle intersezioni della quadrica colla loro congiungente. Ma se i due punti si portano sulle superficie, questo doppio rapporto si annulla indipendentemente dalla loro posizione, eccettuato il caso in cui essi giacciano su di una generatrice, nel qual caso è indeterminato. Questa è l'unica particolarità che può presentarsi nella relazione fra i due punti, a meno che essi non coincidano, e abbiamo quindi la proposizione:

La determinazione metrica proiettiva che si può istituire nello spazio basandosi sopra una superficie di second'ordine non dà ancora alcuna determinazione metrica per la geometria su quest'ultima.

A questo si lega il fatto che mediante trasformazioni lineari della quadrica in sè stessa si possono far coincidere tre suoi punti arbitrarii con tre altri (1).

Volendo avere una determinazione metrica sulla quadrica stessa, bisogna limitare il gruppo di trasformazioni, e ciò si ottiene tenendo fisso un punto qualunque dello spazio (ovvero il suo piano polare). Questo punto non sia dapprima posto sulla superficie. Allora si proietti la quadrica da esso su di un piano, sicchè comparirà una conica come curva di passaggio. Basandoci su di questa, istituiamo nel piano una determinazione metrica proiettiva, che poi riporteremo sulla quadrica (vedi § 7 del testo). Questa è una vera e propria determinazione metrica a curvatura costante; onde si ha la proposizione:

Sulla quadrica si ha una determinazione metrica siffatta, tenendo fisso un punto esterno ad essa.

Analogamente si trova (vedi § 4 del testo):

Si ottiene sulla quadrica una determinazione metrica a curvatura nulla assumendo come punto fisso un punto della superficie medesima.

(1) Questi rapporti si alterano nella geometria metrica ordinaria; due punti all'infinito hanno certo di per sè un invariante assoluto. La contraddizione che per tal modo si potrebbe trovare nel computo delle trasformazioni lineari della superficie all'infinito in sè stessa sparisce, in quanto che le traslazioni e le trasformazioni per similitudine che vi sono comprese non alterano affatto il luogo dei punti all'infinito.

Per tutte queste determinazioni metriche sulla quadrica le generatrici di essa sono linee di lunghezza nulla. L'espressione per l'elemento d'arco sulla superficie differisce dunque nelle diverse determinazioni solo per un fattore. Non vi sono sulla superficie elementi lineari assoluti. Però si può ben parlare dell'angolo formato da due direzioni diverse sulla superficie.

Tutte queste proposizioni e considerazioni possono servire senz'altro per la geometria della retta. Per lo spazio rigato a sè non esiste da principio una vera e propria determinazione metrica. Ne sorge una solo quando teniamo fisso un complesso lineare, e precisamente essa ha curvatura costante o nulla secondo che il complesso è generale o speciale (una retta). Al porre in evidenza un complesso è particolarmente legata anche la validità di un elemento lineare assoluto. Indipendentemente da ciò, le direzioni di passaggio a rette vicine che tagliano quella data hanno lunghezza nulla, e si può anche parlare dell'angolo formato da due direzioni di passaggio arbitrarie (1).

VII. *Interpretazione delle forme binarie.*

Accenneremo qui all'aspetto notevole che, basandosi sull'interpretazione di $x + iy$ sulla sfera, si può dare al sistema invariantivo delle forme binarie cubiche e biquadratiche.

Una cubica binaria f ha un covariante cubico Q, uno quadratico Δ, e un invariante R (2). Da f e Q si ricava tutta una serie di covarianti di sesto grado

$$Q^2 + \lambda R f^2,$$

fra cui è compreso anche Δ^3. Si può mostrare (3) che ogni covariante della forma cubica deve scindersi in gruppi consimili di sei punti. Siccome λ può assumere valori complessi, si ha un numero doppiamente infinito di tali covarianti (4).

Ora tutto il sistema di forme così circoscritto può essere rappresentato sulla sfera nel modo seguente. Mediante un'acconcia trasformazione lineare della sfera in sè stessa si portino i tre punti che rappresentano f in tre punti

---

(1) Vedi la Memoria: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.* Math. Annalen, Bd. V, pag. 271.

(2) Vedi a questo proposito i relativi capitoli di Clebsch: *Theorie der binären Formen.*

(3) Considerando le trasformazioni lineari di f in sè stessa. Vedi Math. Annalen, Bd. IV, pag. 352.

(4) [Cfr. Beltrami: *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche.* Memorie Acc. Bologna. 1870.]

equidistanti di una stessa circonferenza massima. Questa possiamo chiamarla equatore; su di essa i tre punti f abbiano rispettivamente la longitudine 0°, 120°, 240°. Allora Q sarà rappresentato dai punti dell'equatore di longitudine 60°, 180°, 300°; Δ dai due poli. Ogni forma $Q^2 + \lambda R f^2$ sarà rappresentata da sei punti, le cui latitudini e longitudini saranno contenute nello schema seguente, in cui α e β indicano numeri qualunque:

α	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$
β	$120+\beta$	$240+\beta$	$-\beta$	$120-\beta$	$240-\beta$

Tenendo dietro a questi sistemi di punti sulla sfera, è interessante il vedere in qual modo ne sorgano f e Q contati due volte, e Δ contato tre volte. —

Una forma biquadratica f ha un covariante H dello stesso suo grado, un covariante T di sesto grado, due invarianti i e j. È particolarmente da considerarsi la serie di forme biquadratiche $iH + \lambda j f$, che corrispondono tutte allo stesso T, e fra cui sono compresi i tre fattori di secondo grado in cui si può scomporre T, ciascuno contato due volte.

Per il centro della sfera facciamo ora passare tre assi mutuamente ortogonali OX, OY, OZ. Le loro sei intersezioni colla sfera rappresentano la forma T. I punti di una quaderna $iH + \lambda j f$, essendo x, y, z le coordinate di un punto arbitrario della sfera, sono rappresentati dallo schema:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ x & -y & -z \\ -x & y & -z \\ -x & -y & z. \end{array}$$

Essi sono sempre vertici di un tetraedro simmetrico, le cui coppie di spigoli opposti sono dimezzate dagli assi coordinati; dal che risulta caratterizzato l'ufficio di T nella teoria delle equazioni biquadratiche come risolvente di $iH + \lambda j f$.

Erlangen, ottobre 1872.

Fine del Tomo XVII.° (Serie II.ª).

Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti.

(*Di* Felice Klein [*a Göttingen*]). (*)

Programma pubblicato in occasione dell' accoglimento nella Facoltà filosofica e nel Senato dell' Università di Erlangen, 1872,

tradotto da GINO FANO.

Fra i risultati ottenuti negli ultimi cinquant' anni nel campo della Geometria occupa il primo posto lo sviluppo della *Geometria Proiettiva* (v. nota I). Benchè da principio le così dette relazioni metriche, non conservandosi invariate nelle proiezioni, sembrassero inaccessibili a questa disciplina, tuttavia recentemente si è riusciti ad abbracciarle anch' esse sotto il punto di vista proiettivo, di modo che ora i metodi proiettivi comprendono tutta quanta la geometria. Solo che le proprietà metriche vi compaiono, non più come proprietà degli oggetti in sè, ma come relazioni fra essi ed una forma fondamentale, il cerchio immaginario all' infinito (delle sfere).

(*) [Alla proposta del sig. Segre †) di pubblicare negli Annali una traduzione del mio Programma del 1872 ho accondisceso tanto più volentieri, in quanto che il primo volume testè comparso della « *Theorie der Transformationsgruppen* » di Lie (Leipzig 1888) potrebbe far sì che l' interesse dei geometri si rivolgesse maggiormente a siffatte discussioni. — La traduzione è assolutamente letterale; nei due o tre passi in cui si sono mutate alcune parole si son racchiuse fra parentesi quadre [—] le nuove espressioni. Nello stesso modo si sono contrassegnate una serie di aggiunte sotto il testo, che solo ora vi furono introdotte.

F. Klein.]

†) Le ragioni di questa proposta (messa poi ad esecuzione grazie al sig. Fano, studente nell' Università di Torino) non consistevano per me soltanto nell' interesse *storico* che a quest' opuscolo proviene dalla moltitudine di ricerche, specialmente del sig. Klein e della sua scuola, che più o meno direttamente s' ispirarono da quasi un ventennio alle vaste vedute ed ai profondi concetti in esso contenuti. Questo lavoro non è, a mio avviso, abbastanza noto ai *giovani geometri italiani;* ed è specialmente per essi che ho desiderato si